

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»  
Институт математики, физики и информационных технологий  
Кафедра функционального анализа

УТВЕРЖДАЮ:  
Директор института



И. Н. Якунина  
«20» января 2021 г.

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА**

по дисциплине Б1.В.3 Вариационное исчисление и методы оптимизации

Направление подготовки/специальность: 01.03.01 - Математика

Профиль/направленность/специализация: Дифференциальные уравнения,  
динамические системы и оптимальное управление

Уровень высшего образования: бакалавриат

Квалификация: Бакалавр

год набора: 2020

Тамбов, 2021

**Автор программы:**

Кандидат физико-математических наук, доцент Панасенко Елена Александровна

Рабочая программа составлена в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.01 - Математика (уровень бакалавриата) (приказ Министерства образования и науки РФ от «10» января 2018 г. № 8).

Рабочая программа принята на заседании Кафедры функционального анализа «11» января 2021 г. Протокол № 5

Рассмотрена и одобрена на заседании Ученого совета Института математики, физики и информационных технологий, Протокол от «20» января 2021 г. № 1.

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Цели и задачи дисциплины.....	4
2. Место дисциплины в структуре ОП бакалавра.....	6
3. Объем и содержание дисциплины.....	6
4. Контроль знаний обучающихся и типовые оценочные средства.....	8
5. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля).....	16
6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины.....	18
7. Материально-техническое обеспечение дисциплины, программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы.....	19

## 1. Цели и задачи дисциплины

### 1.1 Цель дисциплины – формирование компетенций:

ПК-1 Способен математически корректно ставить естественно-научные задачи, обладает знанием постановок классических задач математики

ПК-5 Способен передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучаемого явления

### 1.2 Типы задач профессиональной деятельности, к которым готовятся обучающиеся в рамках освоения дисциплины:

- научно-исследовательский
- педагогический

1.3 Дисциплина ориентирована на подготовку обучающихся к профессиональной деятельности в сферах: 01 Образование и наука (в сфере общего, профессионального и дополнительного профессионального образования; в сфере научных исследований), 40 Сквозные виды профессиональной деятельности в промышленности (в сфере научно-исследовательских и опытноконструкторских разработок)

### 1.4 В результате освоения дисциплины у обучающихся должны быть сформированы:

Обобщенные трудовые функции / трудовые функции / трудовые или профессиональные действия (при наличии профстандарта)	Код и наименование компетенции ФГОС ВО, необходимой для формирования трудового или профессионального действия	Индикаторы достижения компетенций
- В Проведение научно-исследовательских и опытно-конструкторских разработок при исследовании самостоятельных тем	ПК-1 Способен математически корректно ставить естественно-научные задачи, обладает знанием постановок классических задач математики	Находит решения математических задач, возникающих при построении различных моделей реальных процессов и явлений. Применяет математические методы для решения практических задач
		Проводит самостоятельный анализ прикладных аспектов в постановках математических задач
- В Проведение научно-исследовательских и опытно-конструкторских разработок при исследовании самостоятельных тем - В/02.6 Проведение работ по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований - В/03.6 Педагогическая деятельность по реализации программ основного и среднего общего образования - В/04.6 Модуль «Предметное обучение. Математика»	ПК-5 Способен передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучаемого явления	Применяет методы различных математических дисциплин для составления математических моделей типовых профессиональных задач

## 1.5 Согласование междисциплинарных связей дисциплин, обеспечивающих освоение компетенций:

ПК-1 Способен математически корректно ставить естественно-научные задачи, обладает знанием постановок классических задач математики

№ п/п	Наименование дисциплин, определяющих междисциплинарные связи	Форма обучения
		Очная (семестр)
		4
1	Научно-исследовательская работа (получение первичных навыков научно-исследовательской работы)	+

ПК-5 Способен передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучаемого явления

№ п/п	Наименование дисциплин, определяющих междисциплинарные связи	Форма обучения		
		Очная (семестр)		
		5	6	8
1	Научно-исследовательская работа			+
2	Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика	+	+	

## 2. Место дисциплины в структуре ОП бакалавриата:

Дисциплина «Вариационное исчисление и методы оптимизации» относится к части, формируемой участниками образовательных отношений, учебного плана ОП по направлению подготовки 01.03.01 - Математика.

Дисциплина «Вариационное исчисление и методы оптимизации» изучается в 7 семестре.

## 3. Объем и содержание дисциплины

3.1. Объем дисциплины: 4 з.е.

Очная: 4 з.е.

Вид учебной работы	Очная (всего часов)
<b>Общая трудоёмкость дисциплины</b>	<b>144</b>
Контактная работа	54
Лекции (Лекции)	14
Практические (Практ. раб.)	40
Самостоятельная работа (СР)	52
Курсовая работа	2

Экзамен	36
---------	----

### 3.2.Содержание курса:

№ темы	Название раздела/темы	Вид учебной работы, час.			Формы текущего контроля
		Лек ции	Пра кт. раб.	СР	
		О	О	О	
7 семестр					
1	Экстремальные задачи: основные понятия. Гладкие конечномерные задачи.	4	12	12	Контрольная работа; Решение задач на практических занятиях
2	Элементы функционального анализа и дифференциального исчисления. Экстремумы функционалов в нормированных пространствах	2	8	12	Решение задач на практических занятиях
3	Вариационное исчисление	8	20	28	Выполнение практических заданий; Контрольная работа

#### Тема 1. Экстремальные задачи: основные понятия. Гладкие конечномерные задачи. (ПК-1)

##### Лекция.

Лекция 1. Общая постановка экстремальной задачи. Примеры экстремальных задач, формализация.

Лекция 2. Основные разделы ТЭЗ. Основные понятия ТЭЗ, общая терминология.

Лекция 3. Основные принципы решения экстремальных задач, необходимые и достаточные условия экстремума. Гладкие конечномерные задачи без ограничений.

Лекция 4. Гладкие конечномерные задачи с ограничениями в виде равенств.

Лекция 5. Гладкие конечномерные задачи с ограничениями в виде неравенств.

##### Практическое занятие.

Занятия №1,2. Формализация экстремальных задач. Конечномерные гладкие задачи. [1] № 1.1.-1.14.

Занятия №3. Гладкие конечномерные задачи с ограничениями в виде равенств. [1] № 2.1.-2.14.

Занятия №4,5. Гладкие конечномерные задачи с ограничениями в виде неравенств. [1] № 3.1.-3.14.

Занятие №6. Контрольная работа № 1.

##### Задания для самостоятельной работы.

- 1 Этапы развития теории экстремальных задач.
- 2 Основные разделы и классификация экстремальных задач.
- 3 Углубленное изучение материалов темы.
- 4 Решение задач, аналогичных рассматриваемым на практических занятиях.

#### Тема 2. Элементы функционального анализа и дифференциального исчисления. Экстремумы функционалов в нормированных пространствах (ПК-5)

### **Лекция.**

Лекция 6. Нормированные и банаховы пространства. Производная по направлению, вариация по Лагранжу,

Лекция 7. Производные по Гато и Фреше.

Лекция 8. Строгая дифференцируемость. Производные высших порядков.

Лекция 9. Экстремумы функционалов в нормированных пространствах.

### **Практическое занятие.**

Занятия №7,8. Производная по направлению, вариация по Лагранжу. Производные по Гато и Фреше. [1] №5.1.- 5.10.

Занятия №9,10. Производные высших порядков. Экстремумы функционалов в нормированных пространствах. [1] №5.11.- 5.20.

### **Задания для самостоятельной работы.**

- 1 Доказать, что все конечномерные нормированные пространства банаховы.
- 2 Построить пример нормированного, но не банахова пространства.
- 3 Привести пример двумерного подпространства  $C([0, 1])$ , единичным шаром которого является единичный круг.
- 4 Углубленное изучение материалов темы.
- 5 Решение задач, аналогичных рассматриваемым на практических занятиях.

## **Тема 3. Вариационное исчисление (ПК-1)**

### **Лекция.**

Лекция 10. Задачи на отыскание слабого экстремума.

Лекция 11. Простейшая задача вариационного исчисления: постановка, правило решения, необходимое условие слабого экстремума первого порядка.

Лекция 12. Леммы Лагранжа и Дюбуа-Реймона.

Лекция 13. Уравнение Эйлера и его частные случаи.

Лекция 14. Задача Больца: постановка, правило решения, необходимое условие слабого экстремума первого порядка.

Лекция 15. Задачи с подвижными концами и границами: постановка, правило решения.

Лекция 16. Изопериметрическая задача: постановка, правило решения, необходимое условие первого порядка.

Лекция 17. Условия второго порядка в задачах вариационного исчисления. Сильные локальные экстремумы.

Лекция 18. Необходимые и достаточные условия сильного локального экстремума в простейшей задаче.

### **Практическое занятие.**

#### **Практические занятия**

Занятие №11. Простейшая задача вариационного исчисления. Частные случаи уравнения Эйлера. [1], стр. 175. №1.1.-1.12.

Занятие №12. Функционалы, зависящие от производных высших порядков, векторная задача. [1], стр. 199. № 5.1.-5.10.

Занятие №13. Задача Бол-ьца. [1], стр. 181. № 2.1.-2.5., 2.8.-2.12.

Занятие №14. Задачи с подвижными концами и границами. [1], стр. 185. № 3.1.-3.10.

Занятие №15. Изопериметрическая задача. [1], стр. 192. № 4.1.-4.10.

Занятие №16,17. Условия второго порядка в задачах вариационного исчисления. Сильные локальные экстремумы. [1], стр. 277. № 1.1.-1.10.

Занятие №18. Контрольная работа № 2.

### **Задания для самостоятельной работы.**

1. Углубленное изучение материалов темы.

2. Решение задач, аналогичных рассматриваемым на практических занятиях.

#### 4. Контроль знаний обучающихся и типовые оценочные средства

##### 4.1. Распределение баллов:

7 семестр

- посещаемость – 2 балла
- текущий контроль – 48 баллов
- контрольные срезы – 2 среза по 10 баллов каждый
- премиальные баллы – 20 баллов
- ответ на экзамене: не более 30 баллов

##### Распределение баллов по заданиям:

№ те мы	Название темы / вид учебной работы	Формы текущего контроля / срезы	Мах. кол-во баллов	Методика проведения занятия и оценки
1.	Экстремальные задачи: основные понятия. Гладкие конечномерные задачи.	<b>Контрольная работа(контрольный срез)</b>	10	% заданий по 2 балла за задание
		Решение задач на практических занятиях	10	3 балла – задача решена верно, метод выбран наиболее рационально, студент грамотно отвечает на все поставленные преподавателем вопросы; 2 балла – задача решена верно, но при этом использован не самый рациональный метод (или студент неуверенно отвечает на поставленные вопросы, ошибается, но сам себя исправляет); 1 балл – студент может правильно решить задачу только с помощью наводящих вопросов преподавателя, но в процессе работы осваивает нужный учебный материал; 0 баллов – студент не может привести решение задачи и не может ответить на наводящие вопросы преподавателя и обнаруживает полную неподготовленность по изучаемой тематике.
2.	Элементы функционального анализа и дифференциального исчисления. Экстремумы функционалов в нормированных пространствах	Решение задач на практических занятиях	20	3 балла – задача решена верно, метод выбран наиболее рационально, студент грамотно отвечает на все поставленные преподавателем вопросы; 2 балла – задача решена верно, но при этом использован не самый рациональный метод (или студент неуверенно отвечает на поставленные вопросы, ошибается, но сам себя исправляет); 1 балл – студент может правильно решить задачу только с помощью наводящих вопросов преподавателя, но в процессе работы осваивает нужный учебный материал; 0 баллов – студент не может привести решение задачи и не может ответить на наводящие вопросы преподавателя и обнаруживает полную неподготовленность по изучаемой тематике.



3.	Вариационное исчисление	Выполнение практических заданий	18	3 балла – задача решена верно, метод выбран наиболее рационально, студент грамотно отвечает на все поставленные преподавателем вопросы; 2 балла – задача решена верно, но при этом использован не самый рациональный метод (или студент неуверенно отвечает на поставленные вопросы, ошибается, но сам себя исправляет); 1 балл – студент может правильно решить задачу только с помощью наводящих вопросов преподавателя, но в процессе работы осваивает нужный учебный материал; 0 баллов – студент не может привести решение задачи и не может ответить на наводящие вопросы преподавателя и обнаруживает полную неподготовленность по изучаемой тематике.
		Контрольная работа(контрольный срез)	10	5 заданий по 2 балла за задание
4.	Посещаемость		2	Студент может получить дополнительно 2 балла при отсутствии пропусков по неуважительной причине, регулярном выполнении заданий, работу у доски
5.	Премияльные баллы		20	Участие в студенческих олимпиадах – 10 баллов Участие в студенческих конференциях – 10 баллов
6.	Ответ на экзамене		30	10-17 баллов – студент раскрыл основные вопросы и задания билета на оценку «удовлетворительно» 18-24 баллов – студент раскрыл основные вопросы и задания билета на оценку «хорошо», 25-30 баллов – студент раскрыл основные вопросы и задания билета на оценку «отлично».
7.	Индивидуальные задания, с помощью которых можно набрать дополнительные баллы на экзамене		50	Добор баллов: студент может представить все задания промежуточного контроля и задания контрольных срезов
8.	Итого за семестр		100	

Итоговая оценка по экзамену выставляется в 100-балльной шкале и в традиционной четырехбалльной. Перевод 100-балльной рейтинговой оценки по дисциплине в традиционную четырехбалльную осуществляется следующим образом:

100-балльная система	Традиционная система
85 - 100 баллов	Отлично
70 - 84 баллов	Хорошо
50 - 69 баллов	Удовлетворительно
Менее 50	Неудовлетворительно

Распределение баллов по курсовой работе:

- представление содержательной части – не более 55 баллов,
- оформление и информационное сопровождение – не более 20 баллов,
- защита курсовой работы – не более 25 баллов.

Распределение баллов по видам учебной работы и методика начисления баллов:

№	Вид учебной работы	Мак. кол-во баллов	Методика начисления баллов
---	--------------------	--------------------	----------------------------

1.	Представление содержательной части	55	<p>41-55 баллов – содержание работы соответствует выбранному направлению подготовки/специальности и теме работы, работа актуальна, выполнена самостоятельно, имеет творческий характер, отличается определенной новизной; проведен обстоятельный анализ степени теоретического исследования проблемы, различных подходов к ее решению, показано знание информационной (при необходимости – нормативной) базы, использованы актуальные данные; проблема раскрыта глубоко и всесторонне, материал изложен логично; теоретические положения органично сопряжены с практикой, даны практические рекомендации, вытекающие из анализа проблемы; проведен количественный анализ проблемы, который подтверждает выводы автора, иллюстрирует актуальную ситуацию, приведены таблицы сравнений, графики, диаграммы, формулы, показывающие умение автора формализовать результаты исследования;</p> <p>21-40 баллов – содержание работы в целом соответствует выбранной теме, структура плана логична и пропорциональна; обоснование актуальности темы подкрепляется анализом степени теоретического исследования проблемы; основные положения работы раскрыты на достаточном теоретическом и методологическом уровне, большая часть теоретических положений сопряжена с практикой; практические рекомендации обоснованы; выводы по работе содержательны и в целом соответствуют поставленным задачам;</p> <p>1-20 баллов – имеет место определенное несоответствие содержания работы заявленной теме; исследуемая проблема в основном раскрыта, но не отличается новизной, теоретической глубиной и аргументированностью; выявлены недочеты в методологических характеристиках курсового исследования; есть нарушения логики изложения материала, поставленные задачи решены не полностью; теоретические положения слабо связаны с практикой, практические рекомендации носят формальный бездоказательный характер</p>
2.	Оформление и информационное сопровождение	20	<p>16-20 баллов – широко представлена библиография по теме работы, в том числе и зарубежные источники, приложения к работе иллюстрируют достижения автора и подкрепляют его выводы, оформление работы полностью соответствует требованиям, предъявляемым к курсовому исследованию;</p> <p>8-15 баллов – приложения, используемые в исследовании, составлены грамотно, прослеживается связь с положениями курсовой работы; список использованной литературы составлен, следуя ГОСТу, и в достаточной мере соответствует теме работы; имеются отдельные неточности в оформлении работы (отсутствует часть ссылок на используемые источники, есть отдельные стилистические, грамматические и орфографические ошибки);</p> <p>1-7 баллов – в работе не полностью использована необходимая для раскрытия темы научная литература, информационные базы данных, а также материалы исследований; библиографический список оформлен неверно; содержание приложений не отражает решения поставленных задач (отсутствуют необходимые приложения); имеются многочисленные неточности в оформлении работы</p>

3.	Защита курсовой работы	25	<p>19-25 баллов – защита отличается полнотой раскрытия темы и представления полученных результатов; студент демонстрирует уверенность и убедительность манеры выступления; стиль и грамотность речи соответствуют культуре представления результатов научного исследования; ответы на дополнительные вопросы характеризуются краткостью и аргументированностью;</p> <p>10-18 баллов – структура и регламент выступления в целом соблюдены; защита сопровождается грамматически правильной, эмоциональной речью; студент поддерживает хороший контакт с аудиторией; отмечается творческий подход в подготовке объектов наглядности презентации; дополнительные вопросы вызывают некоторые затруднения;</p> <p>1-9 баллов – студент демонстрирует невысокое качество устного доклада; доступность и образность представления проделанной работы и полученных результатов вызывает вопросы; отмечается частичное несоответствие презентации содержанию курсового исследования; дизайн визуальной интерпретации представленной работы затрудняет ее восприятие</p>
<b>ИТОГО:</b>		<b>100</b>	

Итоговая оценка по курсовой работе выставляется в 100-балльной шкале и в традиционной четырехбалльной шкале. Перевод 100-балльной рейтинговой оценки по дисциплине в традиционную четырехбалльную осуществляется следующим образом:

100-балльная система	Традиционная система
85 - 100 баллов	Отлично
70 - 84 баллов	Хорошо
50 - 69 баллов	Удовлетворительно
Менее 50	Неудовлетворительно

#### 4.2 Типовые оценочные средства текущего контроля

### Выполнение практических заданий

#### Тема 3. Вариационное исчисление

#### **Тема № 3. Классическое вариационное исчисление.**

1. [1], стр. 175, №№ 1.5. – 1.12.
2. [1], стр. 181, №№ 2.1. – 2.3., 2.6. – 2.10.
3. [1], стр. 185, №№ 3.1., 3.2., 3.5. – 3.11.
4. [1], стр. 199, №№ 5.3. – 5.9.
5. [1], стр. 192, №№ 4.3. – 4.10.
6. [1], стр. 277, №№ 1.1. – 1.10.

### Контрольная работа

Тема 1. Экстремальные задачи: основные понятия. Гладкие конечномерные задачи.

### Контрольная работа №1

#### Тема 1. Экстремальные задачи: основные понятия. Гладкие конечномерные задачи.

Решить гладкие конечномерные задачи на безусловный и условный экстремум:

- 1)  $x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 \rightarrow \text{extr}$ ;
- 2)  $3x_1x_2 - x_1^2x_2 - x_1x_2^2 \rightarrow \text{extr}$ ;
- 3)  $4x + 3y \rightarrow \text{extr}, x^2 + y^2 = 1$ ;
- 4)  $e^{xy} \rightarrow \text{extr}, x + y = 1$ ;
- 5)  $xyz \rightarrow \text{extr}, x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$ ;
- 6)  $x_1x_2 + x_2x_3 \rightarrow \text{extr}, x_1^2 + x_2^2 = 2, x_2 + x_3 = 2$ ;
- 7)  $xyz \rightarrow \text{extr}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ;
- 8)  $e^{x_1-x_2} - x_1 - x_2 \rightarrow \text{extr}, x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
- 9)  $x_1x_3 - 2x_2 \rightarrow \text{extr}, 2x_1 - x_2 - 3x_3 \leq 10, x_2 \geq 0, 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$
- 10)  $x_1x_2x_3 \rightarrow \text{extr}, x_3 \geq 1, x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 8$ .

Тема 3. Вариационное исчисление

## Контрольная работа №2

### Тема 3. Классическое вариационное исчисление

1. Решить простейшую задачу ВИ (использовать необходимое условие 1-го порядка и определение)

$$1) \int_0^1 (\dot{x}^2 - t^2 x) dt \rightarrow \text{extr}, x(0) = x(1) = 0; \quad 2) \int_{-1}^1 (\dot{y}^2 - 2xy) dx \rightarrow \text{extr}, y(-1) = y(1) = 1.$$

2. Найти допустимые экстремали в задаче Больца

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^2 - x^2) dt + x^2(0) - x^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4x\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \text{extr}; \quad 2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^2 - x^2 - 2x) dt - 2x^2(0) - x^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \text{extr}.$$

3. Найти допустимые экстремали в задаче со свободной границей

$$1) \int_0^b \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}, x(0) = 0, b + x(b) + 1 = 0; \quad 2) \int_0^b \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}, x(0) = 0, (b-1)x^2(b) + 2 = 0.$$

4. Решить простейшую задачу ВИ (использовать необходимые и достаточные условия 1-го и 2-го порядков)

$$1) \int_0^1 x^2 \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}, x(0) = 1, x(1) = \sqrt{2}; \quad 2) \int_1^e (x\dot{y}^2 + y\dot{y}) dx \rightarrow \text{extr}, y(1) = 0, y(e) = 1.$$

5. Решить векторную задачу

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\dot{x}^2 - 2x - 4y^2 + \dot{y}^2) dx \rightarrow \text{extr}, y(0) = z(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = z\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1;$$

$$2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2yz) dx \rightarrow \text{extr}, y(0) = z(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

### Решение задач на практических занятиях

Тема 1. Экстремальные задачи: основные понятия. Гладкие конечномерные задачи.

### Задания для практических занятий

#### Тема 1. Экстремальные задачи: основные понятия. Гладкие конечномерные задачи.

1. Какие из приведенных ниже задач нельзя решить с помощью метода множителей Лагранжа?

$$a) x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \text{extr} \quad b) x_1 x_2 x_3 \rightarrow \text{extr} \quad c) -x_1 - x_2 \rightarrow \text{extr}$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 + x_2 \geq 0$$

$$x_2 \leq 0$$

- d)  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \text{extr}$  e)  $x_2 \ln x_1 \rightarrow \text{extr}$  f)  $x_2^2 \ln x_1^2 \rightarrow \text{extr}$   
 $x_1 \geq 0$   $x_1 \geq 0$   $x_1 \geq 0$   
 $x_2 \geq 0$   $x_2 \leq 0$   $x_2 \geq 0$   
 $x_3 \geq 0$   $x_1 + x_2 \leq 1$   $x_1 + x_2 \leq 1$

2. К каким из приведенных ниже задач применимо следствие из т. Вейерштрасса?

- a)  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \text{extr}$  b)  $x_3^2 \rightarrow \text{extr}$  c)  $-x_1 - x_2 \rightarrow \text{extr}$   
 $x_1 \geq 0$   $x_1 + x_2 = 1$   $x_1 + x_2 \geq 0$   
 $x_2 \leq 0$

- d)  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \text{extr}$  e)  $x_2 \ln x_1 \rightarrow \text{extr}$  f)  $x_2^2 \ln x_1^2 \rightarrow \text{extr}$   
 $x_1 \geq 0$   $x_1 \geq 0$   $x_1 + x_2 \leq 0$   
 $x_2 \geq 0$   $x_2 \leq 0$   
 $x_3 \geq 0$   $x_1 + x_2 \leq 1$

3. Установить знакоопределенность матрицы:

- a)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  b)  $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  c)  $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt[4]{2} \\ -\sqrt[4]{2} & -1 \end{pmatrix}$  d)  $\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$  e)  $\begin{pmatrix} 4\ln \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  f)  $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$

4. Найти экстремумы в задачах без ограничений:

- 1)  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \text{extr}$   
 2)  $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 \rightarrow \text{extr}$   
 3)  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + 2e^{-x_1^2} \rightarrow \text{extr}$   
 4)  $f(x_1, x_2) = \sin x_2 - x_1^2 \rightarrow \text{extr}$   
 5)  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + x_1 - 2x_3 \rightarrow \text{extr}$

5. Найдите экстремумы в задачах с ограничениями в виде равенств:

- 1)  $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \text{extr}, 3x_1 + 4x_2 = 1$   
 2)  $x_1 + x_2 \rightarrow \text{extr}, 5x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = 1$   
 3)  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \text{extr}, x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1 + x_2 - x_3 = \frac{1}{2}$   
 4)  $x_1x_2x_3^3 \rightarrow \text{extr}, x_1 + x_2 + x_3 = 1$   
 5)  $x_1x_2^2x_3^3 \rightarrow \text{extr}, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

6. Найдите экстремумы в задачах с ограничениями в виде равенств и неравенств:

- 1)  $x_1^2 + x_2 \rightarrow \text{extr}, x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$   
 2)  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \text{extr}, x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, x_1 \geq 0, x_1 + x_2 - x_3 = \frac{1}{2}$   
 3)  $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \text{extr}, x_1 + x_2 + x_3 \leq 12, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

### Решение задач на практических занятиях

Тема 2. Элементы функционального анализа и дифференциального исчисления. Экстремумы функционалов в нормированных пространствах

Устный опрос, решение задач

4.3 Промежуточная аттестация по дисциплине проводится в форме экзамена

### Типовые вопросы экзамена (ПК-1, ПК-5)

## Вопросы по дисциплине «Вариационное исчисление и методы оптимизации» для экзамена

- 1 Общая постановка экстремальной задачи. Примеры экстремальных задач (задача Дидоны, задача о брахистохроне, задача о геодезических), формализация.
- 2 Основные разделы ТЭЗ.
- 3 Основные понятия ТЭЗ, общая терминология: задачи на условный и безусловный экстремумы, целевые функционалы, допустимые точки (экстремали), локальные и глобальные экстремумы.
- 4 Основные принципы решения экстремальных задач, необходимые и достаточные условия экстремума.
- 5 Принцип Лагранжа: сведение задач с ограничениями к задачам без ограничений.
- 6 Конечномерные гладкие задачи без ограничений: постановка, правило решения, теорема Ферма. Условия второго порядка.
- 7 Гладкая конечномерная задача с ограничениями в виде равенств: постановка, правило решения. Необходимое условие экстремума первого порядка – принцип Лагранжа.
- 8 Необходимое и достаточное условия второго порядка в гладкой конечномерной задаче с ограничениями в виде равенств.
- 9 Гладкая конечномерная задача с равенствами и неравенствами: постановка, правило решения. Необходимое условие первого порядка, необходимое и достаточное условия второго порядка. Применение теоремы Вейерштрасса и следствия из нее.
- 10 Функционалы в нормированных пространствах. Производная по направлению, вариация по Лагранжу, производные по Гато и Фреше.
- 11 Строгая дифференцируемость. Производные высших порядков.
- 12 Основные теоремы дифференциального исчисления в нормированных пространствах (теорема о суперпозиции, формула Тейлора, теоремы об обратной и неявной функциях).
- 13 Экстремумы функционалов в нормированных пространствах.
- 14 Задачи на отыскание слабого экстремума. Простейшая задача вариационного исчисления: постановка, правило решения, необходимое условие слабого экстремума первого порядка.
- 15 Леммы Лагранжа и Дюбуа-Реймона.
- 16 Уравнение Эйлера и его частные случаи.
- 17 Функционалы, зависящие от производных высших порядков, векторная задача.
- 18 Задача Больца: постановка, правило решения, необходимое условие слабого экстремума первого порядка.
- 19 Задачи с подвижными концами и границами: постановка, правило решения.
- 20 Изопериметрическая задача: постановка, правило решения, необходимое условие первого порядка.
- 21 Условия второго порядка в задачах вариационного исчисления: условия Лежандра и Якоби.
- 22 Сильные локальные экстремумы. Необходимые и достаточные условия сильного локального экстремума в простейшей задаче.

### Типовые задания для экзамена (ПК-1, ПК-5)

1. Какие из приведенных ниже задач нельзя решить с помощью метода множителей Лагранжа?
2. К каким из приведенных ниже задач применимо следствие из т. Вейерштрасса?
3. Какие из приведенных ниже матриц являются неположительно определенными?

### Типовые темы курсовых работ (ПК-1, ПК-5)

1. История возникновения и развития теории экстремальных задач.
2. Методы решения транспортной задачи.
3. Необходимые и достаточные условия второго порядка в различных задачах вариационного исчисления.
4. Задача быстродействия.
5. Первая и вторая задача Дидоны.
6. Аэродинамическая задача Ньютона.

#### 4.4. Шкала оценивания промежуточной аттестации

Оценка	Компетенции	Дескрипторы (уровни) – основные признаки освоения (показатели достижения результата)
«отлично» (85 - 100 баллов)	ПК-1	Отлично находит решения математических задач, возникающих при построении различных моделей реальных процессов и явлений. Отлично умеет применять математические методы для решения практических задач
		Отлично проводит самостоятельный анализ прикладных аспектов в постановках математических задач
	ПК-5	Отлично применяет методы различных математических дисциплин для составления математических моделей типовых профессиональных задач
«хорошо» (70 - 84 баллов)	ПК-1	Хорошо находит решения математических задач, возникающих при построении различных моделей реальных процессов и явлений. Хорошо умеет применять математические методы для решения практических задач
		Хорошо проводит самостоятельный анализ прикладных аспектов в постановках математических задач
	ПК-5	Хорошо применяет методы различных математических дисциплин для составления математических моделей типовых профессиональных задач
«удовлетворительно» (50 - 69 баллов)	ПК-1	Удовлетворительно находит решения математических задач, возникающих при построении различных моделей реальных процессов и явлений. Удовлетворительно умеет применять математические методы для решения практических задач
		Удовлетворительно проводит самостоятельный анализ прикладных аспектов в постановках математических задач
	ПК-5	Удовлетворительно применяет методы различных математических дисциплин для составления математических моделей типовых профессиональных задач
«неудовлетворительно» (менее 50 баллов)	ПК-1	Плохо находит решения математических задач, возникающих при построении различных моделей реальных процессов и явлений. Не умеет применять математические методы для решения практических задач
		Не умеет самостоятельно проводить анализ прикладных аспектов в постановках математических задач
	ПК-5	Плохо умеет применять методы различных математических дисциплин для составления математических моделей типовых профессиональных задач

#### 5. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

##### 5.1 Методические указания по организации самостоятельной работы обучающихся:



Приступая к изучению дисциплины, в первую очередь обучающимся необходимо ознакомиться с содержанием рабочей программы дисциплины (РПД), которая определяет содержание, объем, а также порядок изучения и преподавания учебной дисциплины, ее раздела, части.

Для самостоятельной работы важное значение имеют разделы «Объем и содержание дисциплины», «Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины» и «Материально-техническое обеспечение дисциплины, программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы».

В разделе «Объем и содержание дисциплины» указываются все разделы и темы изучаемой дисциплины, а также виды занятий и планируемый объем в академических часах.

В разделе «Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины» указана рекомендуемая основная и дополнительная литература.

В разделе «Материально-техническое обеспечение дисциплины, программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы» содержится перечень профессиональных баз данных и информационных справочных систем, необходимых для освоения дисциплины.

## 5.2 Рекомендации обучающимся по работе с теоретическими материалами по дисциплине

При изучении и проработке теоретического материала необходимо:

- просмотреть еще раз презентацию лекции в системе MOODLe, повторить законспектированный на лекционном занятии материал и дополнить его с учетом рекомендованной дополнительной литературы;
- при самостоятельном изучении теоретической темы сделать конспект, используя рекомендованные в РПД источники, профессиональные базы данных и информационные справочные системы;
- ответить на вопросы для самостоятельной работы, по теме представленные в пункте 3.2 РПД.
- при подготовке к текущему контролю использовать материалы фонда оценочных средств (ФОС).

## 5.3 Рекомендации по работе с научной и учебной литературой

Работа с основной и дополнительной литературой является главной формой самостоятельной работы и необходима при подготовке к устному опросу на семинарских занятиях, к дебатам, тестированию, экзамену. Она включает проработку лекционного материала и рекомендованных источников и литературы по тематике лекций.

Конспект лекции должен содержать реферативную запись основных вопросов лекции, в том числе с опорой на размещенные в системе MOODLe презентации, основных источников и литературы по темам, выводы по каждому вопросу. Конспект может быть выполнен в рамках распечатки выдачи презентаций лекций или в отдельной тетради по предмету. Он должен быть аккуратным, хорошо читаемым, не содержать не относящуюся к теме информацию или рисунки.

Конспекты научной литературы при самостоятельной подготовке к занятиям должны содержать ответы на каждый поставленный в теме вопрос, иметь ссылку на источник информации с обязательным указанием автора, названия и года издания используемой научной литературы. Конспект может быть опорным (содержать лишь основные ключевые позиции), но при этом позволяющим дать полный ответ по вопросу, может быть подробным. Объем конспекта определяется самим студентом.

В процессе работы с основной и дополнительной литературой студент может:

- делать записи по ходу чтения в виде простого или развернутого плана (создавать перечень основных вопросов, рассмотренных в источнике);
- составлять тезисы (цитирование наиболее важных мест статьи или монографии, короткое изложение основных мыслей автора);
- готовить аннотации (краткое обобщение основных вопросов работы);
- создавать конспекты (развернутые тезисы).

## 5.4. Рекомендации по подготовке к отдельным заданиям текущего контроля

Собеседование предполагает организацию беседы преподавателя со студентами по вопросам практического занятия с целью более обстоятельного выявления их знаний по определенному разделу, теме, проблеме и т.п. Все члены группы могут участвовать в обсуждении, добавлять информацию, дискутировать, задавать вопросы и т.д.

Устный опрос может применяться в различных формах: фронтальный, индивидуальный, комбинированный. Основные качества устного ответа подлежащего оценке:

- правильность ответа по содержанию;
- полнота и глубина ответа;
- сознательность ответа;
- логика изложения материала;
- рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи;
- своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе;
- использование дополнительного материала;
- рациональность использования времени, отведенного на задание.

Устный опрос может сопровождаться презентацией, которая подготавливается по одному из вопросов практического занятия. При выступлении с презентацией необходимо обращать внимание на такие моменты как:

- содержание презентации: актуальность темы, полнота ее раскрытия, смысловое содержание, соответствие заявленной темы содержанию, соответствие методическим требованиям (цели, ссылки на ресурсы, соответствие содержания и литературы), практическая направленность, соответствие содержания заявленной форме, адекватность использования технических средств учебным задачам, последовательность и логичность презентуемого материала;
- оформление презентации: объем (оптимальное количество), дизайн (читаемость, наличие и соответствие графики и анимации, звуковое оформление, структурирование информации, соответствие заявленным требованиям), оригинальность оформления, эстетика, использование возможности программной среды, соответствие стандартам оформления;
- личностные качества: ораторские способности, соблюдение регламента, эмоциональность, умение ответить на вопросы, систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам программы;
- содержание выступления: логичность изложения материала, раскрытие темы, доступность изложения, эффективность применения средств ИКТ, способы и условия достижения результативности и эффективности для выполнения задач своей профессиональной или учебной деятельности, доказательность принимаемых решений, умение аргументировать свои

## **6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

### **6.1 Основная литература:**

1. Хеннер В.К., Белозерова Т.С., Хеннер М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения, вариационное исчисление, основы специальных функций и интегральных уравнений : учеб. пособие. - Санкт-Петербург, Москва, Краснодар: Лань, 2017. - 318 с.
2. Васильева А.Б., Медведев Г.Н., Тихонов Н.А., Уразгильдина Т.А. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах : учеб. пособие. - изд. 3-е, испр.. - СПб. [и др.]: Лань, 2010. - 429 с.
3. Моклячук, М. П. Вариационное исчисление. Экстремальные задачи : учебник. - 2023-02-12; Вариационное исчисление. Экстремальные задачи. - Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2019. - 428 с. - Текст : электронный // IPR BOOKS [сайт]. - URL: <http://www.iprbookshop.ru/91913.html>
- Москва: Юрайт, 2020. - 240 с. - Текст : электронный // ЭБС «ЮРАЙТ» [сайт]. - URL: <https://urait.ru/bcode/453455>
5. Бренерман, М. Х., Жихарев, В. А. Вариационное исчисление : учебное пособие. - 2022-01-18; Вариационное исчисление. - Казань: Казанский национальный исследовательский технологический университет, 2017. - 148 с. - Текст : электронный // IPR BOOKS [сайт]. - URL: <http://www.iprbookshop.ru/79275.html>

### **6.2 Дополнительная литература:**

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление : Учебник. - 5-е изд.. - М.: Едиториал УРСС, 2002. - 319 с.
2. Цлаф Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения : практическое пособие. - Москва: б.и., 1966. - 176 с. - Текст : электронный // ЭБС «Университетская библиотека онлайн» [сайт]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=222234>  
издательство физико-математической литературы, 1961. - 230 с. - Текст : электронный // ЭБС «Университетская библиотека онлайн» [сайт]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=473747>
4. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление : Задачи и примеры с подробными решениями : Учеб. пособие. - 2-е изд., испр.. - М.: Едиториал УРСС, 2002. - 166 с.

### 6.3 Иные источники:

1. Научная электронная библиотека Российской академии естествознания - [www.monographies.ru](http://www.monographies.ru)

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины, программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы**

Для проведения занятий по дисциплине необходимо следующее материально-техническое обеспечение: учебные аудитории для проведения занятий лекционного и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, помещения для самостоятельной работы.

Учебные аудитории и помещения для самостоятельной работы укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы укомплектованы компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Для проведения занятий лекционного типа используются наборы демонстрационного оборудования, обеспечивающие тематические иллюстрации (проектор, ноутбук, экран/ интерактивная доска).

Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

LibreOffice

Операционная система "Альт Образование"

Microsoft Windows 10

Microsoft Office Профессиональный плюс 2007

Профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

1. Российская государственная библиотека. – URL: <https://www.rsl.ru>
2. Российская национальная библиотека. – URL: <http://nlr.ru>
3. Президентская библиотека имени Б.Н. Ельцина. – URL: <https://www.prilib.ru>

### **Электронная информационно-образовательная среда**

[https://auth.tsutmb.ru/authorize?response\\_type=code&client\\_id=moodle&state=xyz](https://auth.tsutmb.ru/authorize?response_type=code&client_id=moodle&state=xyz)

Взаимодействие преподавателя и студента в процессе обучения осуществляется посредством мультимедийных, гипертекстовых, сетевых, телекоммуникационных технологий, используемых в электронной информационно-образовательной среде университета.